



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca
STAATLICHE ABSCHLUSSPRÜFUNG DER OBERSCHULE

Fachrichtung: LI02 – REALGYMNASIUM

LI03 – REALGYMNASIUM - SCHWERPUNKT ANGEWANDTE NATURWISSENSCHAFTEN

Arbeit aus: MATHEMATIK und PHYSIK

Lösen Sie eine der beiden Problemstellungen und beantworten Sie vier der acht Fragen!

PROBLEMSTELLUNG 1

Man betrachte folgende Funktionen:

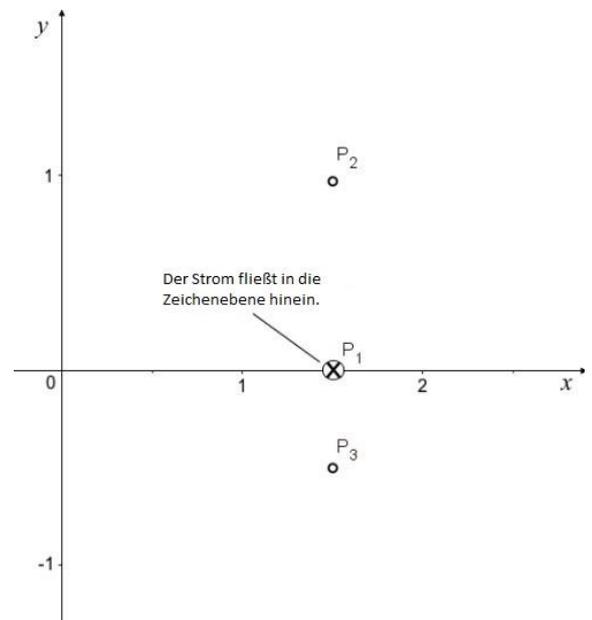
$$f(x) = ax^2 - x + b \qquad g(x) = (ax + b) e^{2x - x^2}.$$

- Zeigen Sie, dass die Funktion g , egal welchen reellen Wert die Parameter a und b mit $a \neq 0$ annehmen, ein absolutes Maximum und ein absolutes Minimum hat. Bestimmen Sie die Werte für a und b , für die die entsprechenden Graphen der Funktionen f und g sich im Punkt $A(2; 1)$ schneiden.
- Man nehme ab hier an, dass folgendes gilt: $a = 1$ und $b = -1$. Untersuchen Sie nun die beiden Funktionen, wobei gezeigt werden muss, dass der Graph von g ein Symmetriezentrum besitzt und dass die Graphen von f und g sich im Punkt $B(0; -1)$ berühren. Bestimmen Sie außerdem den Flächeninhalt der ebenen Region S , die von den Graphen der Funktionen f und g eingeschlossen wird.
- Man nehme an, dass im Koordinatensystem Oxy die Längen in Meter (m) angegeben sind. Man betrachte drei gerade leitende Drähte, die senkrecht zur Ebene Oxy und durch folgende Punkte verlaufen:

$$P_1 \left(\frac{3}{2}; 0 \right), P_2 \left(\frac{3}{2}; 1 \right) \text{ und } P_3 \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \right).$$

Durch die drei Drähte fließt Gleichstrom mit folgenden Stromstärken: $I_1 = 2,0 \text{ A}$, I_2 e I_3 . Die Richtung von I_1 ist in nebenstehender Grafik angegeben. Die Richtungen der anderen beiden elektrischen Ströme sind nicht angegeben.

Ermitteln Sie wie die Zirkulation (Wegintegral) des magnetischen Feldes, das von den Strömen I_1 , I_2 und I_3 erzeugt wird, entlang des Randes von S , sich ändert, je nach Stärke und Richtung von I_2 und I_3 .



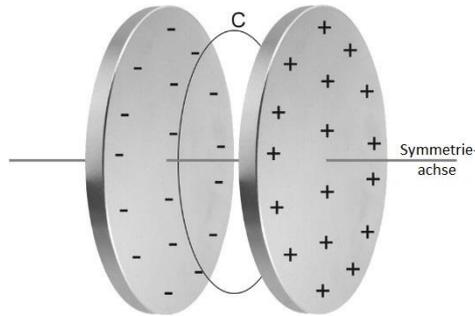
- Man nehme an, dass der Rand der Region S , in Abwesenheit der drei Leiterdrähte, das Profil einer Leiterschleife mit Widerstand $R = 0,20 \Omega$ darstellt. Die Leiterschleife befindet sich in einem homogenen Magnetfeld mit Intensität $B = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ T}$ senkrecht zur Region S . Wenn man die Leiterschleife mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die x -Achse rotieren lässt, wird in ihr ein elektrischer Strom induziert, der maximal den Wert $5,0 \text{ mA}$ erreicht. Bestimmen Sie den Wert von ω .



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

PROBLEMSTELLUNG 2

Ein Plattenkondensator besteht aus zwei kreisförmigen Platten mit Radius R , die einen Abstand d zueinander haben. R und d werden in Meter (m) ausgedrückt. An den Platten wird eine sich zeitlich ändernde elektrische Spannung angelegt, die anfänglich null ist.



Im Innern des Kondensators stellt man das Vorhandensein eines Magnetfeldes \vec{B} fest. Wenn die Effekte an den Rändern des Kondensators vernachlässigt werden, kann im Abstand r zur Symmetrieachse des Kondensators die Stärke von \vec{B} , in Tesla (T) ausgedrückt, durch folgendes Gesetz beschrieben werden:

$$|\vec{B}| = \frac{kt}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} r \quad \text{mit } r \leq R$$

wobei a und k positive Konstanten sind und t die vergangene Zeit vom Startzeitpunkt, in Sekunden (s) ausgedrückt, ist.

- Nachdem Sie die Einheiten von a und k bestimmt haben, erklären Sie warum im Kondensator auch ohne Vorhandensein von Magneten und Leitungsströmen ein Magnetfeld existiert. Welche ist die Beziehung zwischen den Richtungen von \vec{B} und vom elektrischen Feld \vec{E} in den Punkten zwischen den Platten?
- Man betrachte zwischen den Platten eine zur Symmetrieachse senkrechte Ebene. Auf dieser Ebene sei C ein Kreis mit Mittelpunkt auf der Symmetrieachse und Radius r . Bestimmen Sie die Zirkulation (Wegintegral) von \vec{B} entlang C und folgern Sie daraus, dass der Fluss von \vec{E} durch die von C begrenzte Kreisfläche durch folgende Gleichung beschrieben wird

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{2k\pi r^2}{\mu_0 \epsilon_0} \left(\frac{-1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + \frac{1}{a} \right)$$

Berechnen Sie die elektrische Spannung zwischen den Kondensatorplatten.

Welchem Wert nähert sich $|\vec{B}|$, je mehr Zeit verstreicht? Rechtfertigen Sie Ihre Antwort vom physikalischen Standpunkt aus.

- Für $a > 0$ betrachte man die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(t) = -\frac{t}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $F(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} - \frac{1}{a}$ Stammfunktion von f ist, deren Graph durch den Ursprung geht. Untersuchen Sie die Funktion F , indem Sie eventuelle Symmetrien, Asymptoten, Extrema bestimmen. Zeigen Sie, dass F zwei Wendepunkte mit den Abszissen $t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} a$ hat und bestimmen Sie die Steigungen der Tangenten an den Graphen von F in diesen Punkten.



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

- Schließen Sie mit passenden Begründungen vom Graphen von F auf den Graphen von f und spezifizieren Sie was die Abszissen der Wendepunkte von F für die Funktion f darstellen. Berechnen Sie die Fläche der Region, die vom Graphen von f , der Abszissenachse und der zur Ordinatenachse parallelen Geraden, die durch die Extrema der Funktion gehen, eingeschlossen wird. Es gilt nun $b > 0$. Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{-b}^b f(t) dt$.

FRAGEN

1. Eine gegebene Funktion kann man in folgender Form ausdrücken $f(x) = \frac{p(x)}{x^2+d}$, wobei $d \in \mathbb{R}$ und $p(x)$ ein Polynom ist. Der Graph von f schneidet die x -Achse in den Punkten mit Abszissen 0 und $12/5$ und hat als Asymptoten die Geraden mit den Gleichungen $x = 3$, $x = -3$ und $y = 5$. Bestimmen Sie die relativen Hoch- und Tiefpunkte der Funktion f .

2. Gegeben sei die Funktion

$$g(x) = \sum_{n=1}^{1010} x^{2n-1} = x + x^3 + x^5 + x^7 + \dots + x^{2017} + x^{2019}$$

Zeigen Sie, dass es nur ein einziges $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt, für das gilt $g(x_0) = 0$. Bestimmen Sie außerdem den Wert von

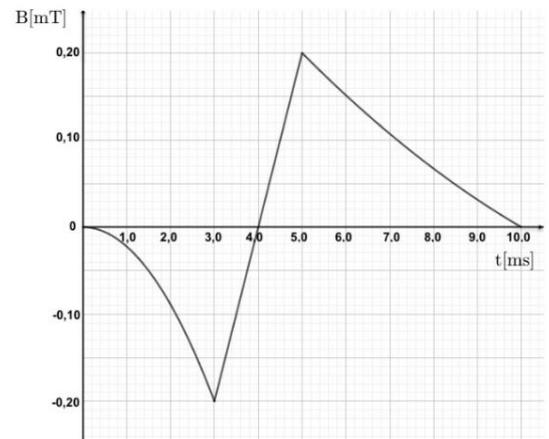
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{1,1^x}$$

3. Bestimmen Sie unter allen Quadern mit quadratischer Grundfläche und mit Gesamtfläche S jenen, bei dem die Summe der Kantenlängen minimal ist.
4. Gegeben seien die Punkte $A(2; 0; -1)$ und $B(-2; 2; 1)$. Zeigen Sie, dass der geometrische Ort der Punkte P im Raum, für die $\overline{PA} = \sqrt{2} \overline{PB}$ gilt, eine Kugeloberfläche S ist und schreiben Sie ihre Koordinatengleichung an. Zeigen Sie, dass der Punkt $T(-10; 8; 7)$ auf S liegt und bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene im Punkt T an S .
5. Es werden 4 Würfel geworfen, deren Seitenflächen jeweils mit den Ziffern 1 bis 6 durchnummeriert sind.
 - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der 4 gewürfelten Zahlen nicht größer als 5 ist?
 - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Produkt der 4 gewürfelten Zahlen ein Vielfaches von 3 ist?
 - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die größte gewürfelte Zahl 4 ist?



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

6. Eine Leiterschleife aus Kupfer, mit Widerstand $R = 4,0 \text{ m}\Omega$, schließt eine Fläche von 30 cm^2 ein. Sie ist in ein homogenes Magnetfeld eingetaucht, dessen Feldlinien senkrecht zur Fläche der Leiterschleife verlaufen. Die zur Fläche senkrechte Komponente des Magnetfeldes ändert sich, wie im Diagramm dargestellt, mit der Zeit. Erklären Sie die Beziehung, die zwischen der Änderung des Feldes, das den Strom induziert, und der Richtung des induzierten Stromes besteht. Berechnen Sie die mittlere Stromstärke, die während folgender Zeitintervalle in der Leiterschleife fließt:



- von 0,0 ms bis 3,0 ms;
- von 3,0 ms bis 5,0 ms;
- von 5,0 ms bis 10 ms.

7. Im Labor beobachtet man die Bewegung eines Teilchens, das sich in positive Richtung der x -Achse von einem mit dem Labor fest verbundenen Bezugssystem bewegt. Zum Startzeitpunkt befindet sich das Teilchen im Ursprung und in einem Zeitintervall von 2,0 ns legt es eine Strecke von 25 cm zurück. Ein Raumschiff fliegt mit einer Geschwindigkeit von $v = 0,80 c$ in positive x -Richtung im Bezugssystem des Labors vorbei. Vom Raumschiff aus wird die Bewegung desselben Teilchens beobachtet. Bestimmen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeiten des Teilchens in den beiden Bezugssystemen. Welches Zeitintervall und welche Strecke würde ein Beobachter, der sich im Raumschiff befindet, messen?
8. Ein Proton dringt in eine Raumregion ein, in der ein homogenes magnetisches Feld mit Betrag $|\vec{B}| = 1,00 \text{ mT}$ vorliegt. Es beginnt sich zu bewegen und vollführt eine schraubenförmige Flugbahn (Helix), mit konstanter Ganghöhe $\Delta x = 38,1 \text{ cm}$, die sich aus einer gleichförmigen Kreisbewegung mit Radius $r = 10,5 \text{ cm}$ und einer geraden gleichförmigen Bewegung zusammensetzt. Bestimmen Sie den Betrag des Geschwindigkeitsvektors und den Winkel, den dieser mit \vec{B} einschließt.

PHYSIKALISCHE KONSTANTEN		
Elementarladung	e	$1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Masse des Protons	m_p	$1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Lichtgeschwindigkeit	c	$2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

Dauer der Arbeit: 6 Stunden

Die Benutzung von wissenschaftlichen und/oder grafischen Taschenrechnern ohne symbolische Rechenfunktion ist erlaubt (M.V. Nr. 205, Art. 17, Absatz 9).

Der Gebrauch eines zweisprachigen Wörterbuchs (Deutsch - Sprache des Herkunftslandes) ist für Schülerinnen und Schüler mit Migrationshintergrund erlaubt.

Das Schulgebäude darf erst drei Stunden nach Bekanntgabe des Themas verlassen werden.